Министерство на образованието и науката

73. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 11. февруари 2024 г.

ТЕМА ЗА 4. КЛАС — РЕШЕНИЯ

Задача 1. Намерете неизвестните числа x и y от равенствата

$$1234 - x : 5 = 1353 - 1023 : 3 \quad \text{и} \quad 6\,.\,(y - 789) = 987\,.\,7 - 879\,.\,7$$

Хари и Рон пътували в много дълъг влак, вагоните на който са номерирани последователно, като първият е с номер 1. Хари бил във вагон номер x, а Рон – във вагон номер y. Оказало се, че след вагона на Хари има толкова вагони, колкото има пред вагона на Рон. Колко вагона е имал влакът?

Решение. От първото равенство получаваме
$1234 - x : 5 = 1353 - 1023 : 3$
$1234 - x : 5 = 1353 - 341$
$1234 - x : 5 = 1012$ (1 точка)
$x : 5 = 1234 - 1012$
$x : 5 = 222$ (1 точка)
$x = 222\,.\,5$
$x = 1110$ (1 точка)

От второто равенство намираме
$6\,.\,(y - 789) = 987\,.\,7 - 879\,.\,7$
$6\,.\,(y - 789) = (987 - 879)\,.\,7$
$6\,.\,(y - 789) = 108\,.\,7$
$6\,.\,(y - 789) = 756$ (1 точка)
$y - 789 = 756 : 6$
$y - 789 = 126$ (1 точка)
$y = 789 + 126$
$y = 915.$ (1 точка)

Рон пътува във вагон 915 и пред него има 914 вагона.
Следователно след 1110-ия вагон на Хари има 914 вагона.
Броят на вагоните на влака е $1110 + 914 = 2024$. (1 точка)

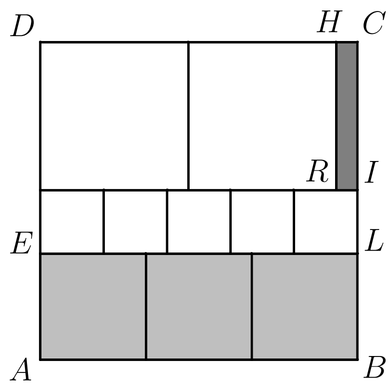
Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

Задача 2. Квадратът $ABCD$ се състои от десет квадрата и един правоъгълник, както е показано на чертежа. Оцветеният правоъгълник $ABLE$ е образуван от три квадрата. Обиколката на $ABLE$ е 208 дм.

а) На колко сантиметра е равна страната на квадрата $ABCD$?

б) Намерете обиколката на правоъгълника $RICH$.



Решение. а) В обиколката на правоъгълника $ABLE$ страната на оцветените квадрати се съдържа 8 пъти. Следователно

$AE = 208 : 8 = 26$ дм и $AB = 26 \,.\, 3 = 78$ дм $=$ 780 см. (3 точки)

б) Страната на най-малките квадрати на чертежа е равна на

$780 : 5 = 156$ см. (1 точка)

Страната на най-големите квадрати на чертежа е

$IC = 780 - (260 + 156) = 364$ см, (1 точка)

откъдето намираме

$CH = 780 - 2 \,.\, 364 = 52$ см. (1 точка)

Обиколката на правоъгълника $RICH$ е

$P_{RICH} = 2 \,.\, (364 + 52) = 832$ см. (1 точка)

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

Задача 3. На остров живеят вълшебни животни: еднорози и двурози. Всеки еднорог има един рог и две звезди на челото. Всеки двурог има два рога и една звезда на челото.

Вълшебните животни на острова имат общо 483 рога и 447 звезди на челата.

а) Намерете колко са еднорозите и колко са двурозите на този остров.

б) Всяко вълшебно животно на острова, еднорог или двурог, може да лети или да говори, а някои могат и двете. Животните, които могат и да летят, и да говорят, са 2 пъти по-малко от тези, които не могат да летят, и с 22 по-малко от тези, които не могат да говорят.

Колко вълшебни животни на острова могат да летят?

Решение. Да означим броя на еднорозите с x и броя на двурозите с y. Общият брой на рогата е

$x + 2.y = 483.$ (0,5 точки)

Общият брой на звездите е

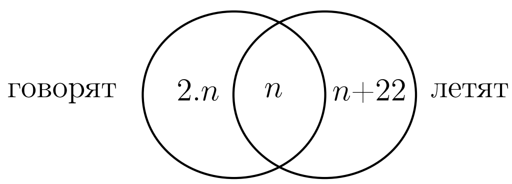
$2.x + y = 447.$ (0,5 точки)

Като съберем двете равенства, получаваме общо

$$3.x + 3.y = 930, \text{ откъдето } x + y = 930 : 3 = 310.$$

Тогава броят на еднорозите е $447 - 310 = 137$, а броят на двурозите е $483 - 310 = 173$. (2 точки)

б) Да означим с n броя на животните, които могат да летят и говорят.
Тогава животните, които не могат да летят, са $2.n$. (0,5 точки)
Животните, които не могат да говорят, са $n + 22$. (0,5 точки)



Общият брой на вълшебните животни е 310 и получаваме

$4.n + 22 = 310$ (1 точка)

Тогава $4.n = 310 - 22 = 288$ и $n = 288 : 4 = 72$. (1 точка)
Животните, които могат да летят, са
$72 + (72 + 22) = 166$. (1 точка)

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

ТЕМА ЗА 5. КЛАС — РЕШЕНИЯ

Задача 1. Намерете стойността на израза

$$a=\frac{5\frac{1}{3}\cdot 8\frac{7}{17}+5\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{17}-2\frac{1}{3}\cdot 9}{59\frac{2}{7}-7\frac{13}{14}-6\frac{5}{14}}$$

и неизвестното число b от равенството

$$4-\cfrac{5}{3+\cfrac{2}{5-b}}=2\frac{3}{5}.$$

Колко са естествените числа n, за които дробта $\frac{n}{20}$ е несъкратима и

$$a<\frac{n}{20}<b\ ?$$

Решение. Намираме

$$a=\frac{5\frac{1}{3}\cdot 8\frac{7}{17}+5\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{17}-2\frac{1}{3}\cdot 9}{59\frac{2}{7}-7\frac{13}{14}-6\frac{5}{14}}=\frac{5\frac{1}{3}.\left(8\frac{7}{17}+\frac{10}{17}\right)-2\frac{1}{3}.9}{59\frac{4}{14}-7\frac{13}{14}-6\frac{5}{14}}=$$

$$=\frac{5\frac{1}{3}\cdot 9-2\frac{1}{3}\cdot 9}{58\frac{18}{14}-7\frac{13}{14}-6\frac{5}{14}}=\frac{\left(5\frac{1}{3}-2\frac{1}{3}\right)\cdot 9}{51\frac{5}{14}-6\frac{5}{14}}=\frac{27}{45}=\frac{3}{5}.$$

От даденото равенство последователно намираме

$$\cfrac{5}{3+\cfrac{2}{5-b}}=4-2\frac{3}{5}=\frac{7}{5},$$

$$3+\frac{2}{5-b}=5:\frac{7}{5}=\frac{25}{7},\quad \frac{2}{5-b}=\frac{25}{7}-3=\frac{4}{7},$$

$$5-b=2:\frac{4}{7}=\frac{7}{2},\quad b=5-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}.$$

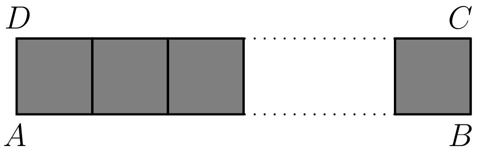
Броят на несъкратимите дроби от вида $\frac{n}{20}$, за които е изпълнено, че

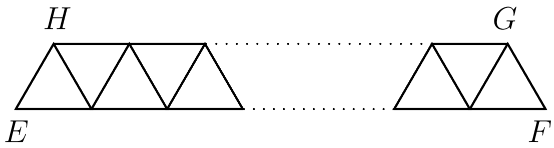
$$\frac{3}{5}<\frac{n}{20}<\frac{3}{2},\text{ т.е. }\frac{12}{20}<\frac{n}{20}<\frac{30}{20},$$

е равен на броя на естествените числа n, които са взаимнопрости с 20 и са между 12 и 30. Това са числата 13, 17, 19, 21, 23, 27 и 29; общо 7 числа.

Задача 2. На чертежа правоъгълникът $ABCD$ е сглобен от квадратни плочки и има обиколка 1188 cm, а фигурата $EFGH$ е сглобена от плочки с форма на равностранен триъгълник и има обиколка 1045 cm.

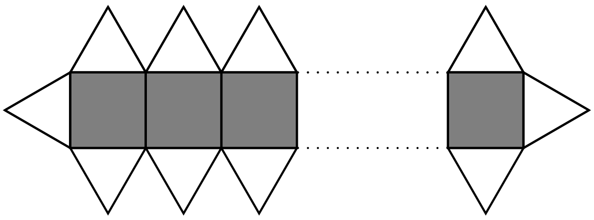
И триъгълните, и квадратните плочки имат страна a cm, където a е естествено число и $a > 1$.





а) Намерете броя на квадратните плочки в правоъгълника $ABCD$ и броя на триъгълните плочки във фигурата $EFGH$.

б) Разглобили фигурите $ABCD$ и $EFGH$ и с част от плочките сглобили следната фигура:



Най-много на колко е равна обиколката на сглобената фигура?

Решение. а) Периметрите на двете фигури се делят на дължината a на страната на една плочка, т.е. a е по-голям от 1 общ делител на 1045 и 1188. Тъй като $1045 = 5.11.19$ и $1188 = 2.2.3.3.3.11$, то НОД$(1045, 1188) = 11$, т.е. $a = 11$ cm.

От обиколката на правоъгълника намираме $AB = (1188 - 2 \cdot 11) : 2 = 583$ cm. Броят на квадратите е $583 : 11 = 53$.

Тъй като $EF = HG + 11$, от обиколката на $EFGH$ намираме

$$HG = (1045 - 3 \cdot 11) : 2 = 506,$$

следователно броят на обърнатите надолу триъгълни плочки е $506 : 11 = 46$. Броят на обърнатите нагоре триъгълни плочки е 47 и общо са 93.

б) Ако x квадратни плочки участват във фигурата, то триъгълните са $2 \cdot x + 2$. Тъй като разполагаме с 93 триъгълни плочки, то четното число $2 \cdot x + 2$ е най-много 92 и x е най-много $(92 - 2) : 2 = 45$. Това е възможно, тъй като разполагаме с 53 квадратни плочки.

Обиколката на фигурата, сглобена от 45 квадратни и 92 триъгълни плочки, е равна на

$$P = (92 \cdot 2) \cdot 11 = 2024 \text{ cm}.$$

Задача 3. Анкетирали учениците от едно училище дали могат да плуват и дали могат да карат колело. Оказало се, че няколко ученици нито могат да плуват, нито да карат колело, $\frac{5}{7}$ от останалите могат да карат колело, а $\frac{2}{9}$ от каращите колело могат да плуват.

а) Намерете колко ученици са анкетирали, ако 280 ученици са отговорили, че не могат да плуват, а $\frac{1}{8}$ от тези, които не могат да плуват, не могат и да карат колело.

б) Намерете най-малкия възможен брой на анкетираните ученици, ако $\frac{5}{12}$ от тях могат да плуват.

Решение. Да означим с x броя на учениците, които карат колело или плуват. Последователно намираме, че:

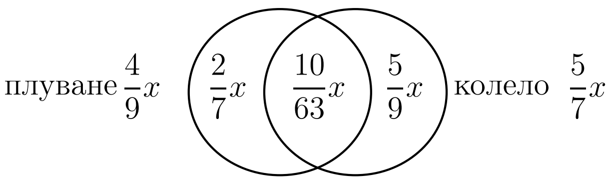
$\frac{5}{7} \cdot x$ ученици карат колело,

$x - \frac{5}{7} \cdot x = \frac{2}{7} \cdot x$ ученици не могат да карат колело, а могат да плуват,

$\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{7} \cdot x = \frac{10}{63} \cdot x$ могат да карат колело и да плуват,

$\frac{2}{7} \cdot x + \frac{10}{63} \cdot x = \frac{4}{9} \cdot x$ ученици могат да плуват,

$x - \frac{4}{9} \cdot x = \frac{5}{9} \cdot x$ ученици могат да карат колело, но не могат да плуват.



а) Тъй като $\frac{1}{8} \cdot 280 = 35$ ученици нито могат да плуват, нито да карат колело, то $280 - 35 = 245$ ученици могат да карат колело, но не могат да плуват. Следователно

$$\frac{5}{9} \cdot x = 245, \quad x = 245 \cdot \frac{9}{5} = 441.$$

Анкетираните ученици са $441 + 35 = 476$.

б) Учениците, които могат да плуват, са $\frac{4}{9} \cdot x$ и са $\frac{5}{12}$ от анкетираните ученици. Следователно анкетираните ученици са

$$\frac{4}{9} \cdot x : \frac{5}{12} = \frac{4}{9} \cdot x \cdot \frac{12}{5} = \frac{16}{15} \cdot x.$$

Броят на анкетираните ученици е естествено число, следователно 15 дели x. Броят $\dfrac{10}{63} \cdot x$ на учениците, които плуват и карат колело, също е естествено число, следователно 63 дели x.

Най-малкото възможно число x е НОК(63, 15) $= 315$. Следователно най-малкият възможен брой на анкетираните ученици е $\dfrac{16}{15} \cdot 315 = 336$.

Оценяване на задача 1. Намиране на a – 3 точки;
намиране на b – 3 точки;
намиране на броя на несъкратимите дроби – 1 точка.

Оценяване на задача 2. а) Намиране на страната a – 1 точка;
намиране на броя на квадратните плочки – 1 точка;
намиране на броя на триъгълните плочки – 2 точки;
б) Обосновка, че фигурата съдържа най-много 45 квадратни и 92 триъгълни плочки – 2 точки;
намиране на обиколката на фигурата – 1 точка.

Оценяване на задача 3. а) Намиране на броя на учениците, които могат да карат колело, но не могат да плуват – 1 точка;

Обосновка, че броят на учениците, които могат да карат колело, но не могат да плуват, е $\frac{5}{9}$ от броя на учениците, които карат колело или плуват – 1 точка;

Намиране на броя на учениците, които карат колело или плуват – 0,5 точки.

Намиране на броя на анкетираните ученици – 0,5 точки.

б) Обосновка, че броят на учениците които могат да карат колело или да плуват, се дели на 63 – 1 точка;

Изразяване на връзката между броя анкетирани ученици и броя на учениците които могат да карат колело или да плуват – 1 точка;

Обосновка, че броят на учениците които могат да карат колело или да плуват, се дели на 15 – 1 точка;

Намиране на най-малкия възможен брой на учениците – 1 точка.

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

ТЕМА ЗА 6. КЛАС — РЕШЕНИЯ

Задача 1. Пресметнете стойността на изразите A и B, където

$$A = -(2024^{-1} \cdot (-1)^{-1})^{-1}\ ; \qquad B = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2024}}}}.$$

Сравнете C и D, където

$$C = \frac{\left(\dfrac{1}{B}\right)^{A-1} - 1}{A^A}\ ; \qquad D = \frac{B^{-A} - 1}{A^{A+1}}.$$

Решение. Имаме $A = -(2024^{-1} \cdot (-1)^{-1})^{-1} = -(2024^1 \cdot (-1)^1) = 2024$.

$$B = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2024}}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - 1 : \cfrac{2023}{2024}}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{2024}{2023}}} =$$

$$= \frac{1}{1 - 1 : \left(-\dfrac{1}{2023}\right)} = \frac{1}{1 + 2023} = \frac{1}{2024}.$$

Заместваме с получените стойности:

$$C = \frac{\left(1 : \dfrac{1}{2024}\right)^{2024-1} - 1}{2024^{2024}} = \frac{2024^{2023} - 1}{2024^{2024}},$$

$$D = \frac{(2024^{-1})^{-2024} - 1}{2024^{2024+1}} = \frac{2024^{2024} - 1}{2024^{2025}}.$$

Разширяваме дробта C с 2024 така, че да има равен знаменател с D, и получаваме

$$C = \frac{2024^{2024} - 2024}{2024^{2025}} < \frac{2024^{2024} - 1}{2024^{2025}},$$

откъдето $C < D$.

Оценяване. Намиране на A – 1 точка;
за намиране на B – 3 точки;
за заместване и опростяване на израза за C – 1 точка;
за заместване и опростяване на израза за D – 1 точка;
за сравняване на C и D – 1 точка.

Задача 2. В правоъгълна координатна система с единична отсечка 1 mm са дадени точките

$$A(-23;-22),\ B(46;-22),\ C(0;22),\ D(-23;22).$$

Да се намерят координатите на всички точки E, за които

$$S_{ABE}=\frac{3}{8}S_{ABCD}\quad \text{и}\quad S_{ADE}=\frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Да се определи вида на фигурата с върхове в намерените точки E и да се пресметне лицето ѝ.

Решение. Точките A и B (а също C и D) имат равни ординати, следователно AB и CD са успоредни на абсцисната ос и $AB = 46-(-23) = 69$ mm, $CD = 23$ mm. Точките A и D имат равни абсциси, следователно AD е успоредна на ординатната ос и $AD = 22-(-22) = 44$ mm. Следователно $ABCD$ е правоъгълен трапец и

$$S_{ABCD}=\frac{(69+23).44}{2}=2024\ \text{mm}^2.$$

Нека EH_1 е височина в $\triangle ADE$.

$$S_{ADE}=\frac{1}{4}S_{ABCD},\quad \frac{AD\cdot EH_1}{2}=\frac{1}{4}\cdot 2024,\quad \frac{44\cdot EH_1}{2}=506,\quad EH_1=23\,\text{mm}.$$

Тъй като AD е успоредна на Oy и абсцисата на точката A е -23, от $EH_1 = 23$ следва, че

абсцисата на точката E е $-23+23=0$ или $-23-23=-46$.

Нека EH_2 е височина в $\triangle ABE$.

$$S_{ABE}=\frac{3}{8}S_{ABCD},\quad \frac{AB\cdot EH_2}{2}=\frac{3}{8}\cdot 2024,\quad \frac{69\cdot EH_2}{2}=759,\quad EH_2=22\,\text{mm}.$$

Тъй като AB е успоредна на Ox и ординатата на точката A е -22, от $EH_2 = 22$ следва, че

ордината на точката E е $-22+22=0$ или $-22-22=-44$.

Възможните координати на точката E са

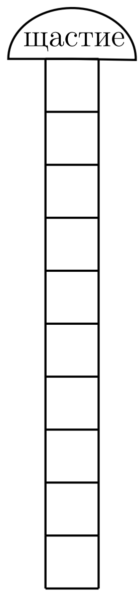
$$(-46;-44),\ (0;-44),\ (0;0),\ (-46;0).$$

Тези точки са върхове на правоъгълник със страни 44 mm и 46 mm и лице, равно на

$$S=44\cdot 46=2024\ \text{mm}^2.$$

Оценяване. Намиране на AB, CD, AD – 1,5 точки;
за определяне на вида и намиране на лицето на $ABCD$ – 0,5 точки;
за намиране на възможните абсциси на точката E – 1,5 точки;
за намиране на възможните ординати на точката E – 1,5 точки;
за намиране на четирите възможни координати на точката E – 1 точка;
за намиране на лицето на получената фигура – 1 точка.

Задача 3. В страната Праволандия жителите се разплащат с монети от по 1, 2, 3 и 4 дмера. Монетите имат формата на правоъгълник съответно с размери 1×1, 2×1, 3×1 и 4×1.



а) Квадрат 21×21 е изцяло покрит с монети, които не се припокриват. Сред тях броят на монетите от 2 дмера е с 20% по-голям от броя на монетите от 1 дмер, а броят на монетите от 4 дмера е с 40% по-малък от броя на монетите по 3 дмера. Колко монети са използвани за покриването на квадрата?

б) Вратата на стаята на щастието е правоъгълник с размери 1×10. Тя се отваря, като се покрие изцяло с монети, които не се припокриват. По колко различни начина могат да се подредят монети така, че да се отвори вратата на щастието?

Решение. а) От условието, че монетите от 2 дмера са с 20% повече от монетите от 1 дмер следва, че броят на монетите от 1 дмер е кратен на 5; нека е $5x$, където x е естествено число. Тогава монетите от 2 дмера са $120\%.5x = 6x$.

По същия начин, от условието, че монетите от 4 дмера са с 40% по-малко от монетите по 3 дмера следва, че броят на монетите от 3 дмера е кратен на 5; нека е $5y$, където y е естествено число. Тогава монетите от 4 дмера са $60\%.5y = 3y$.

Като изразим броя на единичните квадратчета в квадрата 21×21, получаваме

$$5x \cdot 1 + 6x \cdot 2 + 5y \cdot 3 + 3y \cdot 4 = 21^2,$$

$$17x + 27y = 441. \tag{1}$$

В полученото равенство $27y$ и 441 се делят на 9, следователно $17x$ се дели на 9. Тъй като 17 и 9 са взаимнопрости, то x се дели на 9. Тогава $x = 9a$, където a е естествено число. Като заместим в равенство (1) и разделим на 9, получаваме

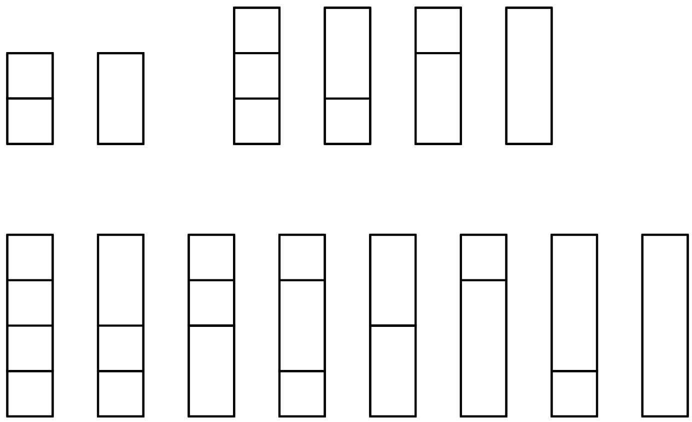
$$17a + 3y = 49.$$

В полученото диофантово уравнение a е най-много 2 (тъй като $17.3 = 51 > 49$). При $a = 1$ получаваме $3y = 32$, което е невъзможно. При $a = 2$ получаваме $y = 5$.

Следователно $x = 9.2 = 18$ и общият брой на монетите е

$$5x + 6x + 5y + 3y = 11x + 8y = 11 \cdot 18 + 8 \cdot 5 = 198 + 40 = 238.$$

б) Последователно ще разгледаме по колко начина могат да се подредят монетите, за да се покрие врата с по-малки размери. Възможните подреждания са показани на чертежа:



размери на вратата	1×1	1×2	1×3	1×4
брой начини за покриване	1	2	4	8

Да разгледаме по колко начина може да се покрие с монети правоъгълник 1×5. Ако най-отгоре поставим монета 1×1, под нея остава правоъгълник 1×4, който може да се покрие по 8 начина. Ако най-отгоре поставим монета 1×2, под нея остава правоъгълник 1×3, който може да се покрие по 4 начина. Ако най-отгоре поставим монета 1×3, под нея остава правоъгълник 1×2, който може да се покрие по 2 начина. Ако най-отгоре поставим монета 1×4, под нея остава правоъгълник 1×1, който може да се покрие по единствен начин. Така възможните подредби в правоъгълник 1×5 са $8 + 4 + 2 + 1 = 15$.

По същия начин,

възможните подредби в правоъгълник 1×6 са $15 + 8 + 4 + 2 = 29$;

възможните подредби в правоъгълник 1×7 са $29 + 15 + 8 + 4 = 56$;

възможните подредби в правоъгълник 1×8 са $56 + 29 + 15 + 8 = 108$;

възможните подредби в правоъгълник 1×9 са $108 + 56 + 29 + 15 = 208$;

възможните подредби в правоъгълник 1×10 са $208 + 108 + 56 + 29 = 401$.

Забележка. Покритието в а) е възможно, например така: на 3 реда по 5 монети монети от 4 дмера (общо 15 монети); на следващите 4 реда монети от 3 дмера (на първите 3 реда по 7 монети, а на четвъртия 4 монети, общо 25 монети); на следващите 11 реда монети от 2 дмера (на 10 реда по 10 монети, на единадесетия ред – 8 монети, общо 108 монети). Останалите празни места се запълват с монети по 1 дмер, общо 90.

Оценяване. а) Общо 3 точки.
За изразяване на връзката между броя на монетите от 1 дмер и 2 дмера; от 3 дмера и 4 дмера – 0,5 точки.
За получаване на равенство за броя на квадратчетата (в зависимост от въведените означения) – 1 точка.
За решаване на полученото диофантово уравнение – 1 точка.
За намиране на броя на монетите – 0,5 точки.

б) Общо 4 точки.
За намиране на броя на възможните покрития на 1×1, 1×2, 1×3 и 1×4 – 1 точка.
За връзката между броя на покритията на 1×5 и разгледаните преди това случаи – 1 точка.
За довършване на задачата – 2 точки.

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.

ТЕМА ЗА 7. КЛАС — РЕШЕНИЯ

Задача 1. Всички сътрудници в една фирма работят с еднаква производителност и на тази база за месец януари била планирана определена продукция. В началото на януари n от сътрудниците започнали да работят по нова технология и повишили производителността си с $p\%$.

Ръководителите на фирмата предвидили сума от A лв. за поощряване на тези сътрудници, която да разпредели поравно между тях. Те пресметнали, че всеки ще получи по 180 лв., а ако работещите по новата технология бяха с 5 повече, всеки от тях щеше да получи с 30 лв. по-малко.

а) Намерете n и A.

б) Продукцията на фирмата за месец януари била с 24% по-голяма от планираната. Мениджърът на фирмата пресметнал, че ако 60% от сътрудниците на фирмата бяха работили по новата технология, януарската продукция щеше да е с 97,92% по-голяма от планираната. Намерете броя на сътрудниците във фирмата и процента p.

Решение. а) От равенството

$$180n = 150(n+5)$$

следва, че $n = 25$ и намираме $A = 25 \cdot 180 = 4500$ лв.

б) Процентът, с който се увеличава продукцията, е пропорционален на броя на сътрудниците, които работят по новата технология. Следователно

$$24 : 97{,}92 = 25 : (60\%x),$$

където x е общият брой на сътрудниците във фирмата. От основното свойство на пропорциите получаваме, че

$$24.0{,}6x = 25.97{,}92 \iff x = \frac{97{,}92.25}{24.0{,}6} = 170.$$

Нека старата производителност на всеки работник е 1, а по новата технология е $1 + p\%$. Тогава

$$25 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + (170 - 25) \cdot 1 = 1{,}24 \cdot 170.1,$$

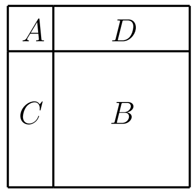
откъдето намираме $p = 163{,}2$.

Оценяване.

а) Общо 2 точки. Съставяне на уравнение – 1 точка. Намиране на n и A – по 0,5 точки.

б) Общо 5 точки. Съставяне на пропорция и намиране на броя на служителите – 3 точки. Намиране на p – 2 точки.

Задача 2. Квадрат със страна $5a$ е разделен на квадрати A и B и правоъгълници C и D, както е показано на чертежа. С S_A, S_B, S_C, S_D са означени лицата на съответните фигури.



а) Докажете, че $S_A + S_B \geqq S_C + S_D$.

б) Ако $S_A < S_B$ и $(S_A + S_B) : (S_C + S_D) = 13 : 12$, намерете $S_A : S_B$.

в) Ако страните на квадратите A и B, измерени в сантиметри, са естествени числа и $S_A + S_B - S_C = 20^2 + 24^2$, намерете възможните стойности на дължината на a в милиметри.

Решение. Нека страната на A е x, а страната на B е y; правоъгълниците C и D са със страни x и y. Имаме $x + y = 5a$.

а) Имаме $S_A + S_B = x^2 + y^2, \quad S_C + S_D = 2xy$. Тогава

$$S_A + S_B - (S_C + S_D) = (x - y)^2 \geqq 0.$$

б) Нека $S_A + S_B = 13k$ и $S_C + S_D = 12k$. Тъй като $S_A + S_B + S_C + S_D = 25a^2$, получаваме $k = a^2$, т.е. $S_A + S_B = 13a^2$ и $S_C + S_D = 12a^2$.

Имаме

$$x^2 + y^2 = 13a^2, \quad 2xy = 12a^2 \Longrightarrow (x - y)^2 = a^2.$$

Тъй като $S_A < S_B$, то $x < y$ и от последното равенство следва, че $y - x = a$. Освен това $x + y = 5a$ и намираме $y = 3a$, $x = 2a$.

Накрая $S_A : S_B = x^2 : y^2 = 4 : 9$.

в) Записваме условието във вида

$$(\star) \qquad x^2 + y^2 - xy = 20^2 + 24^2,$$

където x и y са естествени числа.

Ако x и y са нечетни числа, то лявата страна на $(\star)$ е нечетна, а дясната е четна, т.е. равенството е невъзможно. Ако едно от числата x и y е четно, от $(\star)$ следва, че и другото е четно.

Нека $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, където x_1 и y_1 са естествени числа. Като заместим $(\star)$ и разделим на 4, получаваме

$$(\star\star) \qquad x_1^2 + y_1^2 - x_1 y_1 = 10^2 + 12^2.$$

По същия начин от $(\star\star)$ получаваме, че x_1 и y_1 са четни числа; $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, където x_2 и y_2 са естествени числа. Като заместим $(\star\star)$ получаваме

$$4x_2^2 + 4y_2^2 - 4x_2 y_2 = 244 \iff 3x_2^2 + (x_2 - 2y_2)^2 = 244.$$

От ограничението $3x_2^2 \leqq 244$ получваме, че $x_2 \leqq 9$.

Следователно $x_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а условието, че $244 - 3x_2^2$ е точен квадрат е изпълнено само при $x_2 = 4$, 5 и 9.

При $x_2 = 4$ имаме $|4-2y_2| = 14$ с единствено естествено решение $y_2 = 9$.

При $x_2 = 5$ имаме $|5-2y_2| = 13$ с единствено естествено решение $y_2 = 9$.

При $x_2 = 9$ имаме $|9 - 2y_2| = 1$ с естествени решения $y_2 = 4$ и $y_2 = 5$.

Така възможните стойности на $x + y = 4(x_2 + y_2)$ са 52 и 56. Следователно $5a = 52$ cm, т.е. $a = 104$ mm или $5a = 56$ cm, т.е. $a = 112$ mm.

Оценяване.

а) 1 точка.

б) 2 точки.

в) Общо 4 точки. За доказване, че x и y са четни – 1 точка. За довършване на решението – 3 точки.

Задача 3. Да се намерят всички четирицифрени четни числа N, за които $N + 1$ е точен квадрат, а N^3 има 160 делители.

Решение. Щом $N + 1 = m^2$ и N е четно число, то m е нечетно число, т.е. $m = 2k + 1$. Тогава

$$N = (2k + 1)^2 - 1 = 4k(k + 1)$$

и тъй като произведението на две последователни числа $k(k + 1)$ се дели на 2, то N се дели на 8.

Нека $N = 2^a.{p_1}^{a_1}...{p_k}^{a_k}$, където $a \geqq 3$ и $p_1, p_2, ..., p_k$ са различни прости числа, по-големи от 2, а $a_1, a_2, \ldots, a_k$ са естествени числа. Броят на делителите на числото $N^3 = 2^{3a}.{p_1}^{3a_1}...{p_k}^{3a_k}$ е

$$(3a + 1)\,(3a_1 + 1)\,...\,(3a_k + 1) = 160.$$

Тъй като $3a+1 \geqq 10$ и $3a_i+1 \geqq 4$ за $i = 1, 2, \ldots, k$, са възможни следните случаи.

1. случай. $3a + 1 = 160 \Rightarrow a = 53$, $N = 2^{53}$

2. случай. $3a + 1 = 40$, $3a_1 + 1 = 4 \Rightarrow a = 13$, $a_1 = 1$, $N = 2^{13}.p_1$

3. случай. $3a + 1 = 16$, $3a_1 + 1 = 10 \Rightarrow a = 5$, $a_1 = 3$, $N = 2^5.{p_1}^3$

4. случай. $3a + 1 = 10$, $3a_1 + 1 = 16 \Rightarrow a = 3$, $a_1 = 5$, $N = 2^3.{p_1}^5$

5. случай. $3a + 1 = 10$, $3a_1 + 1 = 4$, $3a_2 + 1 = 4 \Rightarrow a = 3$, $a_1 = a_2 = 1$, $N = 2^3.p_1.p_2$

В първия случай $N = 2^{53}$ не е четирицифрено число.

Във втория случай $N = 2^{13}.p_1 \geqq 8192 \cdot 3 > 10000$ не е четирицифрено число.

В третия случай $N = 2^5.{p_1}^3$.

При $p_1 = 3$ получаваме $N + 1 = 32.27 + 1 = 684$, което не е точен квадрат. При $p_1 = 5$ получаваме $N + 1 = 32.125 + 1 = 4001$, което не е точен квадрат. При $p_1 \geqq 7$ получаваме $N \geqq 32.7^3 > 10000$, т.е. N не е четирицифрено число.

В четвъртия случай $N = 2^3.{p_1}^5$.

При $p_1 = 3$ получаваме $N + 1 = 8.243 + 1 = 1945$, което не е точен квадрат. При $p_1 \geqq 5$ получаваме $N \geqq 8.5^5 = 8.3125 > 10000$, т.е. N не е четирицифрено число.

В петия случай $N = 2^3 p_1 p_2$. Тъй като $N = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$ е произведение на две последователни четни числа, едното от които се дели на 2, но не се дели на 4, то възможностите за представянето на N във вида $N = (m-1)(m+1)$ са:

- $m - 1 = 2$, $m + 1 = 4p_1p_2 \Rightarrow m = 3$, $p_1p_2 = 1$ – невъзможно;
- $m - 1 = 2p_1p_2$, $m + 1 = 4 \Rightarrow m = 3$, $p_1p_2 = 1$ – невъзможно;
- $m - 1 = 4$, $m + 1 = 2p_1p_2 \Rightarrow m = 5$, $p_1p_2 = 3$ – невъзможно;
- $m - 1 = 2p_1$, $m + 1 = 4p_2 \Rightarrow p_1 = 2p_2 - 1$. Следователно
$$N = 8p_1p_2 = 8(2p_2 - 1)p_2 = 16p_2^2 - 8p_2 = (4p_2 - 1)^2 - 1$$
и от неравенството $1000 \leqq N < 10000$ стигаме до ограничението
$$32 \leqq 4p_2 - 1 \leqq 100,$$
откъдето за простото число p_2 получаваме $p_2 \in \{11, 13, 17, 19, 23\}$. Освен това $p_1 = 2p_2 - 1$ също е просто число, което се получава само при $p_2 = 19$, $p_1 = 37$. Намираме решението $N = 8.19.37 = 5624$;
- $m - 1 = 4p_1$, $m + 1 = 2p_2 \Rightarrow p_2 = 2p_1 + 1$. Както в предишния случай,
$$N = 8p_1p_2 = 8p_1(2p_1 + 1) = 16p_1^2 + 8p_1 = (4p_1 + 1)^2 - 1$$
и от $1000 \leqq N < 10000$ получаваме $p_1 \in \{11, 13, 17, 19, 23\}$. Освен това $p_2 = 2p_1 + 1$ също е просто число, което се получава само при $p_1 = 11$, $p_2 = 23$ и $p_1 = 23$, $p_2 = 47$. Намираме решенията $N = 8.11.23 = 2024$ и $N = 8.23.47 = 8648$.

Окончателно всички възможни стойности на N са 5624, 2024 и 8648.

Оценяване. За обосноваване, че N се дели на 8 и за записване на равенството за броя на делителите на N^3 – 1 точка;
за свеждане на задачата до петте случая – 1 точка;
за разглеждане на първите три случая – 1 точка;
за случай 4 и намиране на едното решение – 2 точки;
за случай 5 и намиране на другите две решения – 2 точки.

Всяко друго вярно решение се оценява с пълен брой точки.

При оценяване на непълни решения, различни от предложеното, да бъдат присъждани точки в зависимост от постигнатия напредък в решението.