30 ЗАДАЧИ НА 30 ЕЗИКА: ОТГОВОРИ

7 декември 2019

1: A	2: B	3: E	4: B	5: E	6: E	7: A	8: C	9: C	10: B
11: D	12: B	13: D	14: A	15: A	16: C	17: A	18: A	19: A	20: D
21: C	22: D	23: E	24: D	25: D	26: E	27: A	28: C	29: D	30: D

*	#	Език	Language
English	30	английски	English
Français	17	френски	French
Deutsch	28	немски	German
Italiano	4	италиански	Italian
Български	21	български	Bulgarian
Македонски	16	македонски	Macedonian
Português	12	португалски	Portuguese
Nederlands	18	холандски	Dutch
Română	23	румънски	Romanian
Esperanto	10	есперанто	Esperanto
Українська	11	украински	Ukrainian
Беларуская	1	белоруски	Belarusian
Hrvatski	24	хърватски	Croatian
Filipino	19	филипински	Filipino
Lietuvių	15	литовски	Lithuanian

*	#	Език	Language
Svenska	8	шведски	Swedish
Türkçe	22	турски	Turkish
Русский	26	руски	Russian
Polski	5	полски	Polish
Español	6	испански	Spanish
Ελληνικά	20	гръцки	Greek
Shqip	2	албански	Albanian
Slovenčina	7	словашки	Slovak
Slovenščina	13	словенски	Slovene
Српски	29	сръбски	Serbian
Suomi	27	фински	Finnish
Eesti	3	естонски	Estonian
Čeština	9	чешки	Czech
Norsk	14	норвежки	Norwegian
Magyar	25	унгарски	Hungarian

[1BY] У школьных алімпіядах удзельнічала 36% вучняў класа. Колькі вучняў прынялі ўдзел у алімпіядах, калі ўсяго ў класе 25 вучняў?

A) 9 B) 11 C) 13 D) 15 E) 18

В училищните олимпиади участвали 36% от учениците в класа. Ако в класа има 25 ученици, колко от тях са участвали в олимпиадите?

Отг. A. $0{,}36.25=9$.

[Dy=2AL] Molekula e ujit përbëhet nga dy atome të hidrogjenit dhe një atomi të oksigjenit. Nëse masa relative e atomit të hidrogjenit është 1,008 dhe masa relative e atomit të oksigjenit është 15,999 sa është masa e përgjithshme relative e një molekule të ujit?

A) 17,007 B) 18,015 C) 19,023 D) 33,006 E) 34,014

Водната молекула се състои от два водородни атома и един кислороден атом. Ако относителната маса на водородния атом е 1,008, а тази на кислородния атом е 15,999, колко е относителната обща маса на водната молекула?

Отг. B: $2.1{,}008+15{,}999=18{,}015$.

[Kolm=3EE] Kolmnurga ABC nurgapoolitajad lõikuvad punktis P ja $\angle APC=128°$. Leia nurga ABC suurus.

A) 38° B) 52° C) 54° D) 64° E) 76°

Ъглополовящите на триъгълника ABC се пресичат в точка P и $\angle APC=128°$. Намерете мярката на ъгъл ABC.

Отг. E: Имаме $\angle PAC+\angle PCA=52°$, $\angle BAC+\angle BCA=104°$ и $\angle ABC=76°$.

[Quattro=4IT] Quanti sono i numeri naturali formati da quattro cifre distinte?

A) 3024 B) 4536 C) 5040 D) 6561 E) un'altra risposta

Колко са естествените числа, съставени от четири различни цифри?

Отг. B. За първата цифра има 9 избора (без „0”), за втората – пак 9 (може да е „0”, но не може да е като първата), за третата 8 (трябва да се различава от първите две) и за последната 7 (трябва да се различава от първите три). Отговор: $9.9.8.7=4536$.

[Pięć=5PL] Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie pierwsza cyfra jest parzysta, a pozostałe nieparzyste?

A) 480 B) 2000 C) 3025 D) 3125 E) Żaden z tych

Колко са естествените петцифрени числа, в които първата цифра е четна, а останалите – нечетни?

Отг. E: $4.5.5.5.5=2500$.

[Seis=6ES] En una prueba de atletismo en la que participan 26 atletas se pueden clasificar sólo seis para la final. ¿Cuantos grupos distintos de finalistas se pueden formar?

A) 110110 B) 120120 C) 130130 D) 210210 E) 230230

В състезание по лека атлетика, в което участват 26 спортисти, само шест се класират за финала. Колко различни групи финалисти могат да се формират?

Отг. E: ${}_{26}C_6=230230$.

[7SK] Na mape s mierkou 1:40 000 je vzdialenosť dvoch miest vyznačená úsečkou dlhou 7,5 cm. Skutočná vzdialenosť týchto dvoch miest je:

A) 3 km B) 30 km C) 300 km D) 3000 km E) ďalšia odpoveď

На карта с мащаб 1:40 000 разстоянието между два града е обозначено с отсечка, дълга 7,5 cm. Реалното разстояние между тези два града е:

Отг. A: $7{,}5.40\,000:100\,000=3$.

[8SE] Ett kylskåp kostar 400 euro. Du blir erbjuden rabatt på 15%, men det tillkommer moms på 20%. Vad kommer du att få betala i slutändan?

A) 368 B) 384 C) 408 D) 442 E) 552

Хладилник струва 400 евро. Предлага се отстъпка от 15%, но има ДДС от 20%. Какво ще плащате накрая?

Отг. C. $400.0,85.1,2=408$.

[9CZ] Mistr společně s učedníkem postaví zeď za 15 hodin. Mistr sám by tuto práci vykonal za 24 hodin. Jak dlouho by zeď stavěl samotný učedník?

A) 36 B) 39 C) 40 D) 45 E) 48

Майстор заедно с ученика си построява стена за 15 часа. Сам майсторът би извършил тази работа за 24 часа. За колко часа ученикът сам би построил стената?

Отг. C: За 1 час ученикът построява $(1/15)-(1/24)=1/40$ от стената.

[10EO] La aŭtonumero je kvar ciferoj $\overline{ABCD}$ plenumas ĉi ecojn: ĝi donis reston 3 kiam dividiĝis per 4, 5, 6, 7, 8, sed plene dividiĝis per 13. Kalkuli $A+B+C+D$.

A) 15 B) 18 C) 21 D) 24 E) Alia respondo

Четирицифрен автомобилен номер $ABCD$ дава остатък 3 при деление на 4, 5, 6, 7, 8, но се дели точно на 13. Пресметнете $A+B+C+D$.

Отг. B: Имаме НОК$(4;5;6;7;8)=840$. Проверката за делимост на 13 на четирицифрените числа от вида $840k+3$ дава само $840.11+3=9243$.

[11UA] Визначте дві останні цифри числа 2019^{2019}.

A) 19 B) 39 C) 59 D) 79 E) Жодна з цих відповідей

Намерете последните две цифри на числото 2019^{2019}.

Отг. D. По модул 100 имаме $19^2\equiv61$, $19^3\equiv59$, $19^4\equiv21$, $19^5\equiv-1$, $19^{10}\equiv1$ и $2019^{2019}\equiv(19^{10})^{201}.19^5.19^4\equiv1.(-1).21\equiv79$.

[Doze=12PT] Um poliedro convexo de 32 faces tem doze faces triangulares e vinte faces hexagonais. O número de arestas do poliedro é:

A) 72 B) 78 C) 84 D) 96 E) Outra resposta

Изпъкнал 32-стен има дванадесет триъгълни стени и двадесет шестоъгълни стени. Броят на ръбовете му е:

Отг. B. $(12.3+20.6):2=78$.

[13SI] Diagonala e deli trapez na dva dela, katerih ploščini sta v razmerju $5:7$. V kolikšnem razmerju trapez razdeli srednjica?

A) $5:7$ B) $7:9$ C) $9:11$ D) $11:13$ E) $13:15$

Трапец се дели от диагонала си на две части, чиито лица са в отношение $5:7$. В какво отношение се дели трапецът от средната си основа?

Отг. D: Ако трапецът е $ABCD$, а диагоналът е AC, то средната основа разрязва ACD на части $15x$ и $5x$, а ABC на части $7x$ и $21x$. Отговор: $(15x+7x):(5x+21x)=11:13$.

[14NO] For hvor mange heltall $n\geq0$ er uttrykket 3^n-n^2 et primtall?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) Ingen av disse

За колко цели числа $n\geq0$ изразът 3^n-n^2 е просто число?

Отг. A. Ако n е нечетно, то изразът е четен и е просто число само ако е равен на 2. Това се случва при $n=1$, а всички $n\geq2$ имаме $3^n>n^2+2$ по индукция (за стъпката: $3^{n+1}>3(n^2+2)>(n+1)^2+2$).

Ако n е четно, то изразът се разлага на сбор по разлика и е просто число само ако разликата е равна на 1. Това се случва при $n=0$ (когато стойността е 1, което не е просто) и $n=2$, а всички $n\geq4$ тя е по-голяма от 1 (може да се докаже пак по индукция).

[15LT] Stačiojo gretasienio pagrindas $ABCDA'B'C'D'$ yra rombas, kurio įstrižainių ilgiai 96 ir 152. Šio gretasienio aukštinė yra $AA'=2019$. Apskaičiuokite BC'.

A) 2021 B) 2023 C) 2025 D) 2027 E) 2029

Основата $ABCDA'B'C'D'$ на прав паралелепипед е ромб с диагонали 96 и 152. Височината на този паралелепипед е $AA'=2019$. Пресметнете BC'.

Отг. A. Ако страната на ромба е a, то $(BC')^2=2019^2+a^2=2019^2+48^2+76^2$ и $BC'=2021$.

[16MK] Која е најголемата вредност на дропката

$$\frac{91+70x-7x^2}{2x^2-20x+69}?$$

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) ниту еден од овие одговори

Коя е най-голямата стойност на дробта $\dfrac{91+70x-7x^2}{2x^2-20x+69}$?

Отг. C: Дробта е равна на $\dfrac{332,5}{2(x-5)^2+19}-\dfrac{7}{2}$. Първият знаменател е най-малък при $x=5$ и тогава дробта достига най-голямата си стойност; тя е равна на 14.

[17FR] Combien y a-t-il de nombres entiers n satisfaisant l'égalité $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=(n+3)^3$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Autre réponse

Колко цели числа n изпълняват равенството

$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=(n+3)^3?$$

Отг. A: При деление на 3 третите степени на три поредни числа дават остатъци 0, 1, 2 в някакъв ред, така че сборът им се дели на 3. Тогава $n=3k$ и равенството добива вида

$$54k^3-36k-18=0$$
$$18(k-1)(3k^2+3k+1)=0$$

Десният израз дава остатък 1 при деление на 3, значи не е 0. Така единственото решение е $k=1$, т.е. $n=3$. Впрочем това е и единственото реално решение.

[18NL] Er zijn twee positieve gehele getallen x en y, zo dat $x^3-x^2y+2x^2+2xy^2-5xy-2y^3+3y^2=2019$. Wat is de som van x en y?

A) 31 B) 35 C) 37 D) 43 E) Een ander getal

Има две положителни числа x и y, такива че

$$x^3-x^2y+2x^2+2xy^2-5xy-2y^3+3y^2=2019.$$

Какъв е сборът на x и y?

Отг. А. Уравнението е еквивалентно на

$$(x-y)(x^2+2y^2-3y+2x)=3.673.$$

Явно $x^2+2y^2-3y+2x>0$, значи и $x-y>0$. Тогава $x-y$ е някое от числата 1 (не води до цяло решение), 3 (води до $x=17$, $y=14$), 673 или 2019 (при което вторият множител е по-голям от 3 и не води до решение).

[19FP] Ipagpalagay na $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{672}=\frac{m}{n}$, kung saan m at n ay magkatambal-lantay. Alin sa sumusunod ang magiging labi kapag hahatiin ang m ng 673?

A) 0 B) 1 C) 336 D) 672 E) iba pang sagot

Suppose $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{672}=\frac{m}{n}$, where m and n are co-primes. Which of the following will be the remainder when m is divided by 673?

Ans. A. Note that $\frac{2m}{n}=\left(1+\frac{1}{672}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{671}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{672}+1\right)=\frac{673}{1\cdot 672}+\frac{673}{2\cdot 671}+\cdots+\frac{673}{672\cdot 1}=\frac{673x}{(672!)^2}$ for some integer x. Then $2m(672!)^2=673nx$, so $673\mid 2m(672!)^2$. Since 673 is prime, then $673\mid m$. Thus the remainder is 0.

Нека $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{672}=\frac{m}{n}$, където m и n са взаимно прости. Какъв е остатъкът от делението на m с 673?

Отг. А: Имаме $\frac{2m}{n}=\left(1+\frac{1}{672}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{671}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{672}+1\right)=\frac{673}{1\cdot 672}+\frac{673}{2\cdot 671}+\cdots+\frac{673}{672\cdot 1}=\frac{673x}{(672!)^2}$ за цяло x. Сега $2m(672!)^2=673nx$, така че $673\mid 2m(672!)^2$. Понеже 673 е просто, следва, че $673\mid m$. Отговор: 0.

[20GR] Με πόσους τρόπους 4 άνδρες και 5 γυναίκες μπορούν να καθήσουν σε μια γραμμή με 9 καρέκλες, ώστε τα δύο φύλα να εναλλάσσονται (Γ, Α, Γ, Α, ...);

A) 120 B) 720 C) 1440 D) 2880 E) 5760

По колко начина 4 мъже и 5 жени могат да седят на един ред с 9 стола, така че двата пола да се редуват?

Отг. D. $4!.5!=2880$.

[21BG] От точно 2019 еднакви кибритени клечки в равнината е построен правоъгълник, разделен на k квадратчета със страна по една клечка. Определете броя естествени делители на числото k.

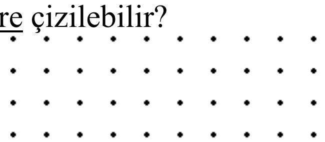
A) 16 B) 20 C) 24 D) 28 E) 32

Отг. С Ако правоъгълникът има m реда и n стълба ($m\le n$), клечките са $2mn+m+n=2019$. Удвояваме и добавяме 1:

$$4mn+2m+2n+1=4039$$
$$(2m+1)(2n+1)=7.577.$$

Сега $2m+1=7$, $2n+1=577$, $m=3$, $n=288$, $k=mn=2^5 3^3$. Отговор: $(5+1)(3+1)=24$.

[22TR] Şekilde bir 3×9 tablonun karelerinin köşe noktaları vardır. Tüm köşeleri de bu noktaların üzerinde olan kaç tane kare çizilebilir?



A) 54 B) 66 C) 72 D) 80 E) 84

На фигурата са дадени върховете на квадратите от таблица 3×9. Колко са квадрата могат да бъдат начертани с върхове сред тези точки?

Отг. D. Размер 1×1: $3.9=27$ квадрата. Размер 2×2, всеки съдържащ и един завъртян: $2.8.2=32$. Размер 3×3, всеки с по два завъртени: $1.7.3=21$. Общо $27+32+21=80$.

[23RO] Care este numărul maxim n pentru care putem alege n numere dintre 1, 2, ..., 2019 cu proprietatea că pentru oricare două $a\neq b$ dintre acestea, $a-b$ nu divide $a+b$?

A) 403 B) 404 C) 504 D) 505 E) Alt răspuns

Какъв максимален брой числа можем да изберем сред 1, 2, ..., 2019, така че за всеки две $a\neq b$ от тях $a-b$ не дели $a+b$?

Отг. Е. Разликата на поредните по големина числа не може да е 1 или 2. При разлика 3 можем да изберем 673 числа: 1, 4, 7, 10, ..., 2017 (ако $a-b=3k$ и b не се дели на 3, то $a+b=2b+3k$ не се дели на $3k$).

[24HR] Na svako polje ploče 5×11 upisan je broj koji je jednak broju pravokutnika koji sadrže to polje. Odredite sumu svih upisanih brojeva.

A) 4004 B) 6006 C) 8008 D) 10010 E) Nijedan od tih

Във всяко поле на таблица 5×11 е записан броят на правоъгълниците, съдържащи това поле. Определете сбора на всички записани числа.

Отг. D. За полето от ред i, стълб j има i избора от коя линия над него да започне правоъгълникът и $6-i$ избора на коя линия под него да свърши; има j избора от коя линия отляво на него да започне правоъгълникът и $12-j$ избора на коя линия отдясно да свърши. Сборът е

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{11} i(6-i)\,j(12-j)=\sum_{i=1}^{5} i(6-i)\sum_{j=1}^{11} j(12-j).$$

Ползвайки формулата $\sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)=\binom{n+1}{3}$, която може да се докаже с метода на блока с децата от сборника „Как да броим, без да броим”, получаваме отговора

$$\binom{7}{3}\binom{13}{3}=35.286=10010.$$

[25HU] Hány megoldása van az $a+b+c+d+e=67$ egyenletnek a pozitív egész számok körében?

A) 480480 B) 540540 C) 670670 D) 720720 E) 840840

Колко решения в цели положителни числа има уравнението $a+b+c+d+e=67$?

Отг. D. Трябва да раздадем 67 еднакви ябълки на пет деца, така че всяко да получи поне една. Раздаваме им по една, а остатъка кодираме с 62 букви „Я” (= дай ябълка на детето) и 4 „С” (= иди при следващото дете). Броят на тези кодове е $66!:(62!4!)=720720$.

[26RU] Квадрат разрезали на 777 квадратиков, из которых ровно у одного сторона имеет длину, отличную от 1. Найдите наименьшую возможную площадь исходного квадрата.

A) 1369 B) 9409 C) 12321 D) 38025 E) другой ответ

Квадрат е разделен на 777 квадратчета, от които точно едно има страна, различна от 1. Намерете най-малкото възможно лице на началния квадрат.

Отг. E: Нека началният квадрат има страна x, а страната на квадратчето, различна от 1, е y. Това квадратче не може да се допира до всички страни на големия, така че x (а значи и y) е естествено. Имаме $776=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ и двата множителя имат еднаква четност, така че вариантите са $x+y=194$, $x-y=4$ (води до $x=99$) или $x+y=388$, $x-y=2$ (води до $x=195$). Отговор: $99^2=9801$.

[27FI] Määritä pisteen $T(1;-2)$ kautta ympyrälle

$$x^2+y^2-8x+12y+27=0$$

piirrettyjen tangenttien yhtälöt.

A) $3x-4y=11$ B) $4x-6y=16$ C) $4x-3y=10$ D) $6x-4y=14$ E) Mikään näistä

Намерете уравнението на допирателната през точка $(1;-2)$ към окръжността $x^2+y^2-8x+12y+27=0$.

Отг. A. Уравнението на окръжността може да се запише като $(x-4)^2+(y+6)^2=25$, така че центърът ѝ е $C(4;-6)$, Щом $\overrightarrow{CT}=(-3;4)$, допирателната е с уравнение $-3x+4y=c$. Заместваме координатите на T и получаваме $c=-11$. Остава да умножим по -1.

[28DE] Sei N die größte natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß jede ihrer Ziffern außer der ersten und der letzten kleiner ist als das arithmetische Mittel ihrer beiden Nachbarziffern. Was ist die Summe der Ziffern von N?

A) 40 B) 42 C) 44 D) 46 E) 48

Нека N е най-голямото естествено число, такова че всяка негова цифра без първата и последната е по-малка от средноаритметичното на двете си съседни. Какъв е сборът от цифрите на N?

Отг. C. В N няма цифра, която да е по-голяма или равна и от двата си съседа. Директно проверяваме, че най-голямото число с даденото свойство, чиито цифри са в намаляващ [растящ] ред, е 9643 [3469], понеже разликите между съседните цифри намаляват [растат] строго отляво надясно. Следователно $N=96433469$.

[29SR] Кружница која садржи темена тупих углова и једно теме оштрог угла ромба дели дужу дијагоналу на делове од 32 см и 4 см. Колика је дужина странице ромба (у см)?

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

Окръжност, съдържаща върховете на тъпите ъгли и един връх на остър ъгъл на ромб, разделя по-дългия диагонал на части от 32 см и 4 см. Каква е дължината на страната на ромба (в см)?

Отг. D. Ако диагоналите на ромба $ABCD$ се пресичат в точка O, а споменатите части са $AE=32$ и $EC=4$, то $AO=18$. Ъглите AOB и ABE са прави, така че $\Delta AOB \sim \Delta ABE$ и $AB^2=AO.AE=18.32=9.64$, откъдето $AB=3.8=24$.

[30EN] Find the number of ordered triples $(k;m;n)$ of positive integers such that $k!+m!+n!$ is a power of 2.

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

Намерете броя наредени тройки $(k;m;n)$ от естествени числа, такива че $k!+m!+n!$ е степен на 2.

Отг. D: Нека временно $k\leq m\leq n$.

Ако $k\geq 3$, сборът се дели на 3: абсурд.

Ако $k=1$, то и $m=1$, за да бъде сборът четен. Ако сега $n\geq 4$, сборът е по-голям от 2 и дава остатък 2 при деление на 4: абсурд. Проверката с по-малки n е успешна за $(1;1;2)$ и $(1;1;3)$, всяко от които поражда по 3 решения.

Ако $k=2$, то $m\leq 3$, иначе сборът е по-голям от 2 и дава остатък 2 при деление на 4: абсурд. Ако $m=2$, то $n\leq 3$ (иначе сборът е над 4 и дава остатък 4 при деление на 8); проверката с по-малки n е неуспешна. Ако $m=3$, то $n\leq 5$ (иначе сборът е над 8 и дава остатък 8 при деление на 16); проверката с по-малки n е успешна за $(2;3;4)$ и $(2;3;5)$, всяко от които поражда по $3!=6$ решения.

Отговор: $2.3+2.6=18$.