30 ЗАДАЧИ НА 30 ЕЗИКА: ОТГОВОРИ

Созопол, септември 2017

1: D	2: C	3: E	4: E	5: A	6: D	7: E	8: E	9: D	10: C
11: B	12: B	13: D	14: D	15: A	16: E	17: B	18: C	19: B	20: C
21: D	22: B	23: B	24: C	25: A	26: D	27: E	28: E	29: E	30: E

*	#	Език	Language
English	19	английски	English
Français	10	френски	French
Deutsch	24	немски	German
Italiano	4	италиански	Italian
Български	13	български	Bulgarian
Македонски	5	македонски	Macedonian
Português	6	португалски	Portuguese
Nederlands	17	холандски	Dutch
Română	23	румънски	Romanian
Esperanto	26	есперанто	Esperanto
Українська	7	украински	Ukrainian
Беларуская	11	белоруски	Belarusian
Hrvatski	16	хърватски	Croatian
Filipino	25	филипински	Filipino
Lietuvių	30	литовски	Lithuanian

*	#	Език	Language
Svenska	15	шведски	Swedish
Türkçe	14	турски	Turkish
Русский	22	руски	Russian
Polski	9	полски	Polish
Español	18	испански	Spanish
Ελληνικά	2	гръцки	Greek
Shqip	21	албански	Albanian
Slovenčina	1	словашки	Slovak
Slovenščina	3	словенски	Slovene
Српски	27	сръбски	Serbian
Suomi	28	фински	Finnish
Eesti	8	естонски	Estonian
Čeština	20	чешки	Czech
Norsk	12	норвежки	Norwegian
Magyar	29	унгарски	Hungarian

[1SK] Medveď mal začiatkom zimy hmotnosť 300 kg. Do jari schudol 10% a potom do leta pribral 20% svojej jarnej hmotnosti. Koľko kg vážil medveď v lete?
A) 308 B) 310 C) 316 D) 324 E) 330
Мечокът имал в началото на зимата маса 300 kg. До пролетта отслабнал с 10%, а после до лятото увеличил пролетната си маса с 20%. Колко кг е тежал мечокът през лятото?
Отг. D: Ще тежи $300 \,.\, 0{,}9 \,.\, 1{,}2 = 324$ кг.

[2GR] Αν $k=6!:2!$, $m=8!:5!$ και $n=19!:17!$, να βάλεις στη σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τα k, m, n.
A) k, m, n B) n, m, k C) m, n, k D) n, k, m E) Καμία από αυτές
Ако $k=6!:2!$, $m=8!:5!$ и $n=19!:17!$, подредете k, m, n в редица от най-малкото до най-голямото.
Отг. C. Имаме $k=360$, $m=336$, $n=342$.

[3SI] Šest pleskarjev je prebarvalo dvorano v 24 urah. V kolikšnem času bi isto delo opravil en sam pleskar?
A) 4 B) 8 C) 48 D) 72 E) 144
Шестима бояджии пребоядисали зала за 24 часа. За колко чàса би свършил тази работа един бояджия?
Отг. E: За $24 \,.\, 6 = 144$ чàса.

[4IT] Qual è la somma di tutti i numeri naturali che divisi per 11 danno un resto uguale al quoziente?
A) 440 B) 540 C) 550 D) 650 E) Nessuno di questi
Какъв е сборът на всички естествени числа, които при деление на 11 дават равни остатък и частно?
Отг. E. Това са $11 \,.\, 1+1$, $11 \,.\, 2+2$, …, $11 \,.\, 10+10$. Техният сбор е $11 \,.\, 55+55=660$.

[5MK] Колку cm^3 е волуменот на цилиндар со дијаметар 8 cm и плоштина $88\pi\,cm^2$?
A) 112π B) 128π C) 144π D) 160π
E) ниту еден од овие одговори
Колко cm^3 е обемът на цилиндър с диаметър 8 cm и повърхнина $88\pi\ cm^2$?
Отг. A. Сборът от лицата на двете основи е $32\pi\,cm^2$, така че околната повърхнина е $56\pi\,cm^2$ и височината е 7 cm. Сега обемът е $16\pi \,.\, 7 = 112\pi\,cm^3$.

[SeisPT] A soma de seis números naturais, não necessariamente distintos, é igual a 27. Qual é o maior valor possível para o produto desses números?
A) 4000 B) 5000 C) 6000 D) 8000 E) 9000
Сборът на шест естествени числа, не непременно различни, е 27. Кое е най-голямото възможно произведение на тези числа?
Отг. D. Да допуснем, че в търсения случай сред числата има две (a и b), такива че $a-b\geq 2$. Ако ги заменим с $a-1$ и $b+1$, произведението се увеличава, понеже $(a-1)(b+1)=ab+a-b-1>ab$, което противоречи на максималността. Следователно числата се различават най-много с 1, т.е. са 4, 4, 4, 5, 5, 5 и произведението им е 8000.

[7UA] Перша цифра трицифрового числа 3. Якщо цю цифру переставити на останнє місце, то число збільшиться на 171. Знайдіть початкове число.
A) 351 B) 353 C) 356 D) 357 E) Жодна з цих відповідей
Първата цифра на трицифрено число е 3. Ако я преместим на последното място, числото ще се увеличи със 171. Намерете началното число.
Отг. E. Имаме $300+x+171=10x+3$, откъдето $x=52$ и числото е 352.

[8EE] Positiivsete arvude a, b ja c korral on $ab=72$, $bc=75$ ja $ca=96$. Leia arv c.
A) 3 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10
За положителните числа a, b и c е в сила $ab=72$, $bc=75$ и $ca=96$. Намерете числото c.
Отг. E: Имаме $c^2=75 \,.\, 96:72=100$, така че $c=10$.

[9PL] Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu jest równa 84. Objętość tego sześcianu jest równa
A) 216 B) 252 C) 294 D) 343 E) Żaden z tych
Сборът от дължините на всички ръбове на куб е 84. Обемът на този куб е:
Отг. D: Кубът има 12 ръба, така че дължината на всеки е $84:12=7$, а обемът е $7^3=343$.

[10FR] La différence de deux nombres positifs est 2017. Leur produit est 30480. Quelle est leur somme?

A) 2027 B) 2037 C) 2047 D) 2057 E) 2067

Разликата на две положителни числа е 2017, а произведението им е 30480. Какъв е сборът им?

Отг. C: Ако числата са x, y, то $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=2047^2$.

[11BY] Вызначце выраз, значэнне якога найбольшае:
A) 2^{279} B) 4^{153} C) 8^{99} D) 16^{72} E) 32^{54}

Кой от изразите има най-голяма стойност:

Отг. B. Отговорите са деветите степени съответно на 2^{31}, 2^{34}, 2^{33}, 2^{32}, 2^{30}.

[12NO] I en kvadratisk pyramide er kvadratets sidekant 12. Sidekanten har lengde 11. Finn volumet til denne pyramiden.
A) 252 B) 336 C) 504 D) 756 E) Ingen av disse

В квадратна пирамида страната на квадрата е 12. Околният ръб има дължина 11. Намерете обема на тази пирамида.

Отг. B. Според питагоровата теорема квадратът на половината от диагонала е 72, квадратът на височината е $11^2-72=49$, така че височината е 7 и обемът е $12.12.7:3=336$.

[13BG] Колко са всички гривни с по 7 мъниста, от които 1 лилаво, 2 розови и 4 бѐли?
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Отг. D: Броени от лилавото, останалите мъниста могат да са ррбббб, брρбббб, ббррбб, рбрббб, брбрбб, рббрбб, брббрб, рбббрб, рббббр.

Проверка с теоремата на Бърнсайд: $|G|=14$, $|\mathrm{Fix}(\boldsymbol{i})|=7!:(2!.4!)=105$, $|\mathrm{Fix}(\text{ротация})|=0$, $|\mathrm{Fix}(\text{отражение})|=3$. Брой гривни: $\dfrac{105+7.3}{14}=9$.

[14TR] k ve n doğal sayılar, $2017!=45^k.n$ sağlayan en büyük k sayısı kaçtır?
A) 499 B) 500 C) 501 D) 502 E) 503

Ако k и n са естествени числа и $2017!=99^k.n$, коя е най-голямата възможна стойност на k?

Отг. D. Имаме $[2017:3]=672$ кратни на 3, $[672:3]=224$ кратни на 3^2, $[224:3]=74$ кратни на 3^3, $[74:3]=24$ кратни на 3^4, $[24:3]=8$ кратни на 3^5 и $[8:3]=2$ кратни на 3^6. В 2017! има общо $672+224+74+24+8+2=1004$ множителя „3”, което осигурява 502 множителя „9”. Също има $[2017:5]=403$ кратни на 5, $[403:5]=80$ кратни на 5^2, $[80:5]=16$ кратни на 5^3 и $[16:5]=3$ кратни на 5^4. В 2017! има общо $403+80+16+3=502$ множителя „5”, което осигурява 502 множителя „45”.

[FemtonSE] På hur många sätt kan fem personer dela på femton kronor om var och en ska få minst en krona?
A) 1001 B) 2002 C) 3003 D) 4004 E) 5005

По колко начина могат петима души да разделят 15 крони, така че всеки да получи поне една крона?

Отг. A. Раздаваме на всеки по една крона. Разпределението на останалите 10 можем да кодираме с 10 букви „К” (= дай крона) и 4 „С” (= премини към следващия човек). Броят на тези кодове е $14.13.12.11:4!=1001$.

[16HR] Na koliko načina mogu 6 dječaka i 2 djevojčice stajati u redu, a da djevojčice ne budu jedna do druge?
A) 380 B) 3880 C) 38880 D) 388880 E) Nijedan od tih

По колко начина могат 6 момчета и 2 момичета да застанат в редица, така че момичетата да не са едно до друго?

Отг. E. Имаме $8!-2.7!=30240$.

[17NL] Een rechthoek met een omtrek van 88 heeft zijden met gehele lengten. Welke van de volgende getallen kan de oppervlakte van de rechthoek zijn?
A) 449 B) 459 C) 469 D) 479 E) 489

Правоъгълник с обиколка 88 има целочислени страни. Кое от следните числа може да бъде лицето му?

Отг. B. Имаме $17.27=459$ и $2(17+27)=88$. Лицата на останалите правоъгълници с обиколка 88 не са сред дадените числа.

[18ES] Un equipo de balonmano está formado por seis jugadores de campo y por un portero. Si un entrenador dispone de 14 jugadores de campo y de tres porteros, ¿cuántas alineaciones distintas puede completar?
A) 3003 B) 6006 C) 9009 D) 12012 E) 18018

Отбор по хандбал се състои от шестима полеви играчи и вратар. Ако треньорът разполага с 14 полеви играчи и трима вратари, колко различни подредби може да реализира?

Отг. C: ${}_{14}C_6.3=9009$.

[19EN] Let S be a set of ten different positive integers, the largest of which is n. It is impossible to construct a quadrilateral with non-zero area, whose side-lengths are all distinct elements of S. What is the smallest possible value of n? A) 125 B) 230 C) 282 D) 423 E) None of these

Нека S е множество от десет различни естествени числа, най-голямото от които е n. Не можем да построим четириъгълник с ненулево лице, чиито дължини на страните са различни елементи на S. Коя е най-малката възможна стойност на n?

Отг. B: Ако $a<b<c<d$ са елементи от S, то трябва $d\geq a+b+c$. В такъв случай най-малките възможни елементи на S са 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, 68, 125, 230.

[20CZ] Mezi osmi knihami jsou pět romány, které chceme v knihovně vedle sebe. Kolik je způsobů uložení osmi knih za této podmínky?
A) 720 B) 1440 C) 2880 D) 4320 E) 5040

Сред осем книга има пет романи, които искаме да са един до друг в библиотеката. По колко начина можем да поставим осемте книги при това условие?

Отг. C: Има 5! начина за подреждане на романите. Оттук нататък ще ги считаме за една книга, така че имаме 4 книги, които могат да се подредят по 4! начина. Отговор: $5!.4!=2880$.

[21AL] Sa është x_{99}, në qoftë se $x_1=3$ dhe $(1-x_n)x_{n+1}=1$ për $n\geq 1$?
A) $-2/3$ B) $-1/2$ C) $1/2$ D) $2/3$ E) Asnjë nga këto

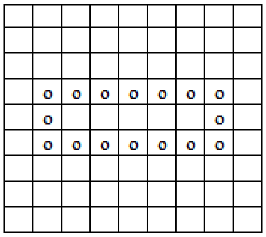
Колко е x_{99}, ако $x_1=3$ и $(1-x_n)x_{n+1}=1$ за $n\geq 1$?

Отг. D: Имаме $x_2=-1/2$, $x_3=2/3$ и $x_4=3=x_1$, така че нататък редицата се повтаря с период 3 и $x_{99}=x_3$.

[22RU] Какое наименьшее число клеток надо отметить на доске 9×9 так, чтобы шахматный слон с любой клетки доски бил не менее двух отмеченных клеток? (Слон бьёт и ту клетку, где стоит.).
A) 14 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

Какъв най-малък брой полѐта от дъска 9×9 трябва да отбележим, така че от всяко поле на дъската шахматен офицер да бие поне две отбелязани полѐта?

Отг. B: Ако разположим 32 офицера по обиколката на дъската, всеки от тях бие поне две отбелязани клетки, а всяка клетка е бита от не повече от 4 офицера, така че клетките са поне $32.2:4=16$. Ето пример с 16:



[23RO] În câte moduri se pot completa căsuțele unui tablou 3×7 cu numerele 1 sau -1 astfel încât produsul elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană să fie -1?

A) 2^{10} B) 2^{12} C) 2^{20} D) 2^{21} E) Alt răspuns

По колко начина можем да запълним полетата на таблица 3×7 с числа 1 или -1, така че произведението на елементите по всеки ред и по всяка колона да е равно на -1?

Отг. B. Имаме по 2 избора за всяко поле, освен за тези от последния ред [колона], които се определят еднозначно от колоната [реда] си. Полето в долния десен ъгъл получава една и съща стойност и от двете места, понеже 3 и 7 имат еднаква четност.

[24DE] Es sind 37 Punkte einer Ebene gegeben, von denen niemals drei Punkte auf ein und derselben Geraden liegen. Wie viele Geraden gibt es, die zwei der 37 Punkte enthalten?

A) 333 B) 444 C) 666 D) 888 E) 999

В една равнина са дадени 37 точки, никои три от които не лежат на една права. Колко са правите, съдържащи 2 от дадените 37 точки?

Отг. C. Има $37.36:2=666$ прави.

[25FP] Ipagpalagay na a,b,c ang mga ugat ng tumbasang $x^3+5x+6=0$. Hanapin $a^3+b^3+c^3$.

A) -18 B) -15 C) -12 D) -9 E) -6

Suppose a,b,c are the roots of the equation $x^3+5x+6=0$. Find $a^3+b^3+c^3$.

Нека a,b,c са корените на уравнението $x^3+5x+6=0$. Намерете $a^3+b^3+c^3$.

Ans. A. From Vieta's Theorem we have $a+b+c=0$ and $abc=-6$. By substituting $a+b+c=0$ in the formula $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ we get $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ so $a^3+b^3+c^3=3abc=-18$.

Отг. A. От формулите на Виет $a+b+c=0$ и $abc=-6$. Замествайки първото във формулата $a^3+b^3+c^3-3abc$ $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$, получаваме $a^3+b^3+c^3-3abc=0$, така че $a^3+b^3+c^3=3abc=-18$.

[26EO] Trovu la plej malgrandan pozitivan entjeron a, tia ke la nombro $N=a^{2n+1}.2^{n+2}+2^{2n+1}.3^{n+2}$ estas dividebla per 19 por ĉiu pozitiva entjero n.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Намерете най-малкото естествено a, такова че числото $N=a^{2n+1}.2^{n+2}+2^{2n+1}.3^{n+2}$ се дели на 19 за всяко естествено число n.

Отг. D: Непосредствено проверяваме, че N не се дели на 19 при $a=1, 2, 3, 4$ за $n=1$. Ще се уверим с индукция по n, че $5^{2n+1}.2^{n+2}+2^{2n+1}.3^{n+2}$ се дели на 19 дори за всяко цяло неотрицателно n. При $n=0$ получаваме $N=38=2.19$. Нека $n\geq1$. Да допуснем, че твърдението е вярно за $n-1$, и да го докажем за n. Щом $5^{2n-1}.2^{n+1}+2^{2n-1}.3^{n+1}$ се дели на 19, то $5^{2n+1}.2^{n+2}+2^{2n+1}.3^{n+2}=50.5^{2n-1}.2^{n+1}+12.2^{2n-1}.3^{n+1}$ $=38.5^{2n-1}.2^{n+1}+12(5^{2n-1}.2^{n+1}+2^{2n-1}.3^{n+1})$. Изразът в скобите се дели на 19 от индукционното предположение и понеже 38 е кратно на 19, индукционната стъпка е завършена.

[27SR] У групи од 12 људи сваки познаје тачно 8 других. Свака два човека који се познају имају тачно 4 заједничких познаника, а свака два који се не познају имају тачно n заједничких познаника. Одредити n.

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

В група от 12 души всеки познава точно 8 други. Всеки двама, които се познават, имат точно 4 общи познати, а всеки двама, които не се познават, имат точно n общи познати. Намерете n.

Отг. E. Да преброим наредените тройки хора $(A;B;C)$, такива че A познава B и C, но те не се познават помежду си. За A има 12 избора, после за B има 8 избора и сега за C има 4 избора. Ако изберем първо C, то изборите за него са 12, после за B има 4 избора и сега за A има n избора. Тогава $n=8$. Пример: три групи, вътре във всяка група хората не се познават, а тези от различни групи се познават.

[28FI] Määritä pisteen $T(1;-2)$ kautta ympyrälle

$$x^2+y^2-8x+12y=27$$

piirrettyjen tangenttien yhtälöt.

A) $3x-4y=11$ B) $4x-6y=16$ C) $4x-3y=10$
D) $6x-4y=14$ E) Mikään näistä

Намерете уравнението на допирателната през точка $(1;-2)$ към окръжността $x^2+y^2-8x+12y=27$.

Отг. E. Уравнението на окръжността може да се запише като $(x-4)^2+(y+6)^2=79$, така че центърът ѝ е $C(4;-6)$, $CT=5$, т.е. T е вътре в окръжността и допирателната не е реална.

[29HU] A p és q prímszámokra $2^q=1999+p^2$. Hány ilyen számpár $(p;q)$ van?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) Ezek közül egyik sem

За простите числа p и q имаме $2^q=1999+p^2$. Колко такива двойки $(p;q)$ има?

Отг. E. При деление със 7 остатъкът на 1999 е 4, на p^2 може да е 0, 1, 2 или 4, а на 2^q може да е 1, 2 или 4, като е 1 само ако q е кратно на 3, но явно $q>10$ и е просто, така че този случай отпада. Сравняването на остатъците сега показва, че единствената възможност за остатъка на p^2 е 0 и понеже p е просто, то $p=7$. Оттук $q=11$, т.е. има само една такава двойка $(p;q)$.

[30LT] Agnė sugalvojo seką: pasirinko $a_1=2$, o kitus narius skaičiavo pagal formulę $a_{m+n}=a_m+a_n+4mn$ (čia m ir n yra bet kokie natūralieji skaičiai). Kam lygus a_{69}?

A) 3174 B) 4761 C) 6348 D) 7935 E) 9522

Агне измислила редица: избрала $a_1=2$, а останалите числа пресметнала по формулата $a_{m+n}=a_m+a_n+4mn$ (където m и n са произволни естествени числа). На колко е равно a_{69}?

Отг. E. По индукция $a_n=2n^2$, понеже това е вярно за $n=1$, а ако е вярно за a_n, то $a_{n+1}=2n^2+2+4n=(n+1)^2$. От друга страна, тази редица съответства на условието, понеже $2(m+n)^2=2m^2+2n^2+4mn$. Сега $a_{69}=2.69^2=9522$.