30 ЗАДАЧИ НА 30 ЕЗИКА: ОТГОВОРИ

Созопол, септември 2016

1: C	2: D	3: B	4: E	5: A	6: A	7: D	8: A	9: E	10: B
11: C	12: A	13: B	14: D	15: B	16: D	17: B	18: E	19: C	20: D
21: A	22: B	23: C	24: C	25: E	26: E	27: D	28: C	29: B	30: A

*	#	Език	Language
English	18	английски	English
Français	21	френски	French
Deutsch	12	немски	German
Italiano	8	италиански	Italian
Български	19	български	Bulgarian
Македонски	2	македонски	Macedonian
Português	11	португалски	Portuguese
Nederlands	20	холандски	Dutch
Română	26	румънски	Romanian
Esperanto	6	есперанто	Esperanto
Українська	5	украински	Ukrainian
Беларуская	7	белоруски	Belarusian
Hrvatski	30	хърватски	Croatian
Suomi	23	фински	Finnish
Lietuvių	15	литовски	Lithuanian

*	#	Език	Language
Svenska	9	шведски	Swedish
Türkçe	16	турски	Turkish
Русский	14	руски	Russian
Polski	22	полски	Polish
Español	13	испански	Spanish
Ελληνικά	27	гръцки	Greek
Shqip	4	албански	Albanian
Slovenčina	29	словашки	Slovak
Slovenščina	1	словенски	Slovene
Српски	24	сръбски	Serbian
Íslenska	28	исландски	Icelandic
Eesti	3	естонски	Estonian
Čeština	17	чешки	Czech
Norsk	25	норвежки	Norwegian
Magyar	10	унгарски	Hungarian

[1SI] Rešite enačbe z absolutno vrednostjo:
$|x+7|-|x-7|=x+1$.
A) $x_1=-13$; $x_2=-1$; $x_3=15$
B) $x_1=-8$; $x_2=1$; $x_3=6$
C) $x_1=-15$; $x_2=1$; $x_3=13$
D) $x_1=-13$; $x_2=1$; $x_3=15$
E) $x_1=-15$; $x_2=-1$; $x_3=13$

Решете модулното уравнение $|x+7|-|x-7|=x+1$.

Отг. C: При $x\le-7$ уравнението има вида $-14=x+1$ и решението му е $x=-15$. При $-7\le x\le 7$ то има вида $2x=x+1$ и решението му е $x=1$. При $x\ge 7$ има вида $14=x+1$ и решението му е $x=13$.

[2MK] Колку степени е аголот помеѓу малата и големата стрелка на часовникот во 8:26 часот?
A) 94 B) 95 C) 96 D) 97
E) ниту еден од овие одговори

Колко градуса е ъгълът между малката и голямата стрелка на часовника в 8:26 часà?

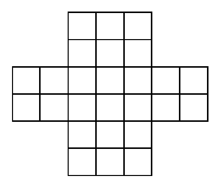
Отг. D. В 8:00 по-големият ъгъл между двете стрелки е 240°. За 26 минути минутната стрелка ще го намали с $26.6°=156°$, а часовата ще го увеличи с $26.0{,}5°=13°$ и ъгълът ще стане $240°+13°-156°=97°$.

[3EE] Laud ostsustati katta plaatidega 12×12 cm. Mitu plaati läheb vaja, kui laua pindala on 2016 cm²?
A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Колко плочки с размер 12×12 са нужни за покриване на маса с площ 2016 cm²?

Отг. B: $2016 : 12^2 = 14$.

[4AL] Sa drejtkëndësha (përfshirë katrorin) janë në këtë figurë?



A) 180 B) 184 C) 188 D) 190 E) Asnjë nga këto

Колко правоъгълника (вкл. и квадрати) има на тази фигура?

Отг. E: Броят на правоъгълниците в хоризонталната таблица 2×7 е равен на произведението на броя на хоризонталните сенки там $(7+6+...+1=28)$ и броя на вертикалните сенки $(2+1=3)$, т.е. на 84. Броят на правоъгълниците в средната таблица 6×3 е равен на произведението на броя на хоризонталните сенки там $(3+2+1=6)$ и броя на вертикалните сенки $(6+5+...+1=21)$, т.е. на 126. Броят на дублираните при това правоъгълници (централната таблица 2×3) е равен на произведението на броя на хоризонталните сенки там $(3+2+1=6)$ и броя на вертикалните сенки $(2+1=3)$, т.е. на 18. Окончателно получаваме $84+126-18=192$ правоъгълника.

[5UA] Юлія прочитала книгу, в якій 160 сторінок, за три дні. Першого дня вона прочитала 40% усієї книги, другого дня – 62,5% від тих сторінок, що залишились, а третього дня – решту. Скільки сторінок дівчинка прочитала третього дня?
A) 36 B) 40 C) 44 D) 48 E) Жодна з цих відповідей

Юлия прочела книга от 160 страници за три дни. Първия ден тя прочела 40% от цялата книга, втория ден – 62,5% от страниците, които останали, а третия ден – остатъка. Колко страници е прочело момичето на третия ден?

Отг. А. $0{,}375.0{,}6.160=36$.

[6EO] Ene de rektangula kampo estas arbo. Ĝi staras je distanco de 9 m de unu angulo, kaj 22 m de la kontraŭa angulo. Ĝi estas 6 m de unu el la aliaj du anguloj. Kio estas la distanco al la arbo de la kvara angulo?

A) 23 m B) 24 m C) 25 m D) 26 m E) 27 m

В правоъгълно поле има дърво. То отстои на разстояние 9 m от единия ъгъл и 22 m от стсрещния ъгъл. То е на 6 m от един от другите два ъгъла. Какво е разстоянието от дървото до четвъртия ъгъл?

Отг. А: Нека x, y, z, t са разстоянията от дървото до четирите страни, така че според Питаговата теорема $x^2+y^2=9^2=81$, $z^2+t^2=22^2=484$, $x^2+t^2=6^2=36$ и за квадрата на разстоянието до четвъртия връх получаваме $z^2+y^2=81+484-36=529=23^2$.

[7BY] Двум хлопчыкам і пяці дзяўчынкам раздалі 2016 вішань пароўну кожнаму. Колькі вішань атрымалі дзяўчынкі?

A) 576 B) 864 C) 1152 D) 1440 E) Ні адзін з іх

На две момчета и пет момичета раздали 2016 вишни поравно. Колко вишни са получили момичетата?

Отг. D. Всеки е получил по $2016:7=228$ вишни, така че за момичетата има общо $288.5=1440$ вишни.

[8IT] La regione limitata di piano avente per contorno l'asse delle x e le rette $y=2x+3$, $y=9-x$ e $x=-1$, ha area uguale a:

A) 36,5 B) 38,5 C) 42,5 D) 44,5 E) Nessuno di questi

Областта от равнината, ограничена от абсцисната ос и от правите $y=2x+3$, $y=9-x$ и $x=-1$, има лице, равно на:

Отг. А. Областта е четириъгълник $ABCD$, за който $A(-1;0)$, $B(9;0)$, $C(2;7)$, $D(-1;1)$. Тя се състои от правоъгълен трапец с височина 3 и основи $1=AD$ и 7, чието лице е $3.(1+7):2=12$, и правоъгълен триъгълник с катети 7 и 7, чието лице е $7.7:2=24{,}5$. Общото лице е 12+24,5=36,5.

[NioSE] Nio elever ska delas in tre grupper om tre. På hur många sätt kan detta göras?

A) 220 B) 240 C) 260 D) 270 E) 280

Деветима ученици се разделят на три групи по трима. По колко начина може да се направи това?

Отг. Е. Всяко разпределение се кодира с дума от три A, три B и три C. Броят на тези думи е $9!/(3!)^3$, като трябва да разделим още на 3!, понеже трите групи са неразличими. Отговор: $9!/(3!)^4=280$.

[10HU] Az m és n pozitív egészekre lnko$(m;n)=21$ és $m+n=2016$. Hány ilyen számpár $(m;n)$ van?

A) 16 B) 32 C) 64 D) 96 E) Ezek közül egyik sem

За естествените числа m и n НОД$(m;n)=21$ и $m+n=2016$. Колко такива двойки $(m;n)$ има?

Отг. В. Ако $m=21a$ и $n=21b$, то НОД$(a;b)=1$ и $a+b=96$. Трябва да преброим числата от 1 до 96, които не се делят на 2, нито на 3: на всеки 6 числа има 2 такива, или общо 32 числа.

[11PT] O produto de 99 números naturais, não necessariamente distintos, é igual a 2016. Qual é o maior valor possível para a soma desses números?

A) 2112 B) 2113 C) 2114 D) 2115 E) 2116

Произведението на 99 естествени числа, не непременно различни, е 2016. Кой е най-големият възможен сбор на тези числа?

Отг. С. Да допуснем, че в търсения случай сред числата има две (a и b), по-големи от 1. Ако ги заменим с ab и 1, сборът се увеличава, понеже $ab+1-a-b=(a-1)(b-1)>0$: противоречие. Следователно числата са 98 единици и 2016, а сборът е 2114.

[12DE] Ermittle die Summe aller vierstelliger positiver ganzer Zahlen, in denen jede der Ziffern 2, 0, 1, 6 genau einmal vorkommt.

A) 57996 B) 59796 C) 75996 D) 79596 E) 97596

Определете сбора на всички четирицифрени естествени числа, в които всяка от цифрите 2, 0, 1, 6 се среща точно по веднъж.

Отг. А. Всяка от цифрите 2, 1, 6 се среща като цифра на хилядите $3!=6$ пъти, а на стотиците, десетиците и единиците – по $2.2.1=4$ пъти. Цифрата 0 няма принос в сбора. Отговор: $6444.(2+1+6)=57996$.

[13ES] En un examen se proponen 14 problemas con la condición de resolver nueve de ellos. ¿De cuántas maneras distintas podemos elegir dichos 9 problemas?

A) 1001 B) 2002 C) 3003 D) 6006 E) 9009

На изпит са дадени 14 задачи с условие да се решат 9 от тях. По колко различни начина можем да изберем такива 9 задачи?

Отг. В: ${}_{14}C_9=2002$.

[14RU] Найдите количество всех упорядоченных троек натуральных чисел (x, y, z) таких, что $xyz=2016$ и $x^2y+y^2z+z^2x=xy^2+yz^2+zx^2$.

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 24

Намерете броя наредени тройки естествени числа (x,y,z), такива че $x^2y+y^2z+z^2x=xy^2+yz^2+zx^2$ и $xyz=2016$.

Отг. D: Имаме $(x-y)(x-z)(y-z)=0$, така че сред числата има равни. Като отчетем, че $2016=2^5.3^2.7$, равните числа могат да са равни на 1, 2, 2^2, 3, 2.3, $2^2.3$, т.е. 6 варианта. Има три избора коя от променливите x, y, z да е различната, така че отговорът е $6.3=18$.

[15LT] Kiek natūraliųjų skaičių porų $(a;b)$ tenkina lygtį $a^3b^4=20^{16}$?

A) 4 B) 6 C) 9 D) 12 E) Kitas skaičius

Колко двойки естествени числа $(a;b)$ изпълняват уравнението $a^3b^4=20^{16}$?

Отг. В. Понеже b^4 и 20^{16} са точни 4-ти степени, същото важи и за a^3, а значи и за a. Ако $a=k^4$, получаваме $k^3b=20^4=2^85^4$. Сега k трябва да има вида 2^m5^n, $m=0, 1, 2$; $n=0, 1$, за всеки от които получаваме единствена стойност за b. Така вариантите са $2.3=6$.

[16TR] k ve n doğal sayılar, $2016!=7^k.n$ sağlayan en büyük k sayısı kaçtır?

A) 331 B) 332 C) 333 D) 334 E) 335

Ако k и n са естествени числа и $2016!=7^k.n$, коя е най-голямата възможна стойност на k?

Отг. D. Имаме $[2016:7]=288$ кратни на 7, $[288:7]=41$ кратни на 7^2 и $[41:7]=5$ кратни на 7^3. Отговор: $k=288+41+5=334$.

[17CZ] Ciferný součet čísla 2016 je 9. Určete počet čtyřmístných čísel, jejichž ciferný součet je 9.

A) 110 B) 165 C) 220 D) 330 E) 495

Сборът на цифрите на числото 2016 е 9. Намерете броя на четирицифрените числа, чийто сбор от цифрите е 9.

Отг. В: Даваме една цифра на първото място и трябва да раздадем останалите 8 на четирите места. Кодираме с 8 букви „У" (увеличи тази цифра с 1) и 3 букви „С" (мини на следващата позиция). Броят на кодовете е $11!:(8!.3!)=165$.

[18EN] We glue together 2016 white unit cubes into a $9\times14\times16$ rectangular solid; then we paint its surface blue. How many of these 2016 cubes have exactly two blue faces?

A) 136 B) 140 C) 144 D) 148 E) None of these

Залепяме 2016 бели единични кубчета в паралелепипед $9\times14\times16$. После го оцветяваме син отвън. Колко от 2016-те кубчета имат точно две сини стени?

Отг. Е: 4 ръба с по $9-2=7$ кубчета, 4 ръба с по $14-2=12$ кубчета и 4 ръба с по $16-2=14$ кубчета; общо $4(7+12+14)=132$ кубчета.

[19BG] Колко са всички гривни с 5 мъниста, ако всяко е лилаво, розово или бяло?

A) 33 B) 36 C) 39 D) 42 E) 45

Отг. С: В Теоремата на Бърнсайд $|G|=10$, $|\mathrm{Fix}(\boldsymbol{i})|=3^5$, $|\mathrm{Fix}(\text{ротация})|=3$ (тип $xxxxx$), $|\mathrm{Fix}(\text{отражение})|=3^3$ (тип $xyzyx$). Брой гривни: $\dfrac{3^5+4.3+5.3^3}{10}=39$.

[20NL] De diagonalen AC en BD van trapezium $ABCD$ ($AB||CD$) snijden elkaar in het punt P. Wat is de oppervlakte van driehoek ADP, als $AD=BC=25$, $AB=19$ en $CD=5$?

A) 32,5 B) 37,5 C) 42,5 D) 47,5 E) 52,5

Диагоналите AC и BD на трапец $ABCD$ ($AB||CD$) се пресичат в точка P. Какво е лицето на триъгълник ADP, ако $AD=BC=25$, $AB=19$ и $CD=5$?

Отг. D. Да построим височините DH и CV. Триъгълниците AHD и BVC са еднакви и $AH=BV=(19-5):2=7$. От питагоровата теорема $AD=24$. От подобието на ABP и CDP следва, че височините им се отнасят както 19:5 и щом сборът им е 24, те са съответно 19 и 5. Така $S_{ABP}+S_{CDP}=(19.19+5.5):2=193$. Лицето на трапеца е $(19+5).24:2=288$ и $S_{ADP}=S_{BCP}=(288-193):2=47{,}5$.

[21FR] Soit $m>n$ deux entiers positifs. Nous écrivons leur somme, leur différence, leur produit et leur quotient. La somme de ces quatre résultats est 99. Trouver $m+n$.

A) 24 B) 27 C) 30 D) 33 E) 36

Нека $m>n$ са две естествени числа. Записваме техните сбор, разлика, произведение и частно. Сборът на тези четири резултата е 99. Намерете $m+n$.

Отг. В: От $m+n+m-n+m.n+m:n=99$ следва $m(n^2+2n+1)=99n$, т.е. $m(n+1)^2=99n$. Числото $(n+1)^2$ е точен квадрат, по-голям от 1 и взаимно прост с n, така че $n=2$, откъдето $m=22$, $m+n=24$.

[22PL] Z grupy 6 chłopców i 6 dziewcząt wybieramy 2 osoby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych osób będzie co najmniej jedna dziewczyna.

A) 16/21 B) 17/22 C) 18/23 D) 19/24 E) Żaden z tych

От група от 6 момчета и 6 момичета са избрани двама. Намерете вероятността сред избраните да има поне едно момиче.

Отг. В: Всички избори на двама души са $12.11:2=66$ варианта. От тях момиче липсва в $6.5:2=15$ варианта. Остават 51 и вероятността е $51/66=17/22$.

[23FI] Olkoon x_1 ja x_2 yhtälön $x^2-5x=9$ ratkaisut. Mitä on ${x_1}^2+{x_2}^2$?

A) 41 B) 42 C) 43 D) 44 E) Mikään näistä

Нека x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2-5x=9$. Пресметнете ${x_1}^2+{x_2}^2$.

Отг. С. От формулите на Виет имаме $x_1+x_2=-5$, $x_1x_2=-9$, така че ${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=25+18=43$.

[24SR] Пас је везан канапом дужине 16 м за угао правоугаоне зграде чије су димензије 10 м и 8 м. Приближно колико квадратних метара је површина по којој пас може да се креће?

A) 602 B) 642 C) 682 D) 722 E) 762

Куче е вързано с въже, дълго 16 м, за ъгъла на правоъгълна сграда с размери 10 м и 8 м. Приблизително колко кв.м е площта, по която кучето може да се движи?

Отг. С. Районът се състои от ¾ кръг с радиус 16 м и ¼ кръгове с радиуси 8 м и 6 м, така че площта му е $(¾)\pi16^2+(¼)\pi(8^2+6^2)=192\pi+25\pi\approx217.22/7=682$.

[25NO] I en rettvinklet trekant ABC er vinkel $ACB=90º$. Sirkelen med AC som diameter har areal 1039, og sirkelen med BC som diameter har areal 987. Hvor stort areal har omsirkelen til ABC? (Omsirkelen til ABC er sirkelen som går gjennom punktene A, B og C.)

A) 52 B) 62 C) 2006 D) 2016 E) Ingen av disse

В правоъгълен триъгълник ABC ъгъл $ACB=90º$. Кръгът с диаметър AC има лице 1039, а този с диаметър BC има лице 987. Какво лице огражда описаната окръжност на ABC? (Това е окръжност, минаваща през точките A, B и C.)

Отг. Е. Според питагоровата теорема квадратът на радиуса на търсената окръжност е равен на сбора от квадратите на радиусите на двата дадени кръга. Тогава и лицето е равно на сбора от двете лица.

[26RO] Un număr natural se numeşte *bun* dacă este multiplul numărului divizorilor săi (spre exemplu 2016 este bun deoarece are $(5+1)(2+1)(1+1)=36$ divizori şi 2016 este multiplu al lui 36). Determinaţi cel mai mare număr bun care este mai mic decât 2016.

A) 2015 B) 2014 C) 2013 D) 2010 E) Alt răspuns

Едно число се нарича *добро*, ако е кратно на броя на своите делители (например 2016 е добро, понеже има 36 делители и 2016 е кратно на 36). Намерете най-голямото добро число, което е по-малко от 2016.

Ans. E. Нечетно число може да е добро само ако има нечетен брой делители, т.е. ако е точен квадрат, но последният такъв преди 2016 е твърде малък. Проверяваме четните числа под 2016:

$2014=2.19.53$ има $(1+1)(1+1)(1+1)=8$ делителя и не е добро;

$2012=2^2.503$ има $(2+1)(1+1)=6$ делителя и не е добро;

$2010=2.3.5.67$ има $(1+1)^4=16$ делителя и не е добро;

$2008=2^3.251$ има $(3+1)(1+1)=8$ делителя и е добро.

[27GR] Πόσοι από τους πρώτους 2016 θετικούς ακέραιους έχουν διαφορετικά ψηφία (σαν 69, 308 και 2016, αλλά **όχι** σαν 313 και 2009);

A) 1234 B) 1238 C) 1242 D) 1246 E) Καμία από αυτές

Колко от първите 2016 естествени числа имат различни цифри (като 69, 308 и 2016, но **не** като 313 и 2009)?

Отг. D. Има 9 едноцифрени, $9.9=81$ двуцифрени, $9.9.8=648$ трицифрени, $9.8.7=504$ от вида 1*** и 4 от вида 2***; общо 1246 числа.

[28IS] Fyrir runu rauntalna a_1, a_2, a_3, ... er gefið að $a_{n+3}=a_n-a_{n-1}$ fyrir $n\geq 2$. Hver er mesti fjöldi M samfelldra talna í rununni sem allar eru jákvæðar ($a_{k+1}>0$, $a_{k+2}>0$,..., $a_{k+M}>0$)?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) Ekkert af þessu

За редица от реални числа a_1, a_2, a_3, . . . е в сила $a_{n+3}=a_n-a_{n-1}$ за $n\geq 2$. Какъв е максималният брой M поредни числа в редицата, които могат да бъдат положителни ($a_{k+1}>0$, $a_{k+2}>0$,..., $a_{k+M}>0$)?

Отг. C. Редицата 1, 2, 3, 4, 1, 1, 1 отговаря на условието и има 7 поредни положителни числа. Ако *a, b, c, d* са поредни числа в редицата, то следващите са $b-a$, $c-b$, $d-c$, $b-a-d$. Сборът на първото и последните три от тези 8 числа е 0, така че няма как всички те да са положителни.

[29SK] Pre nezáporné čísla *a, b, c* platí $a+b+c=1$. Určte minimálnu hodnotu výrazu $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}$.

A) 2,4 B) 2,5 C) 2,6 D) 2,7 E) 2,8

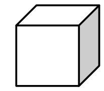
За неотрицателните числа *a, b, c* е в сила $a+b+c=1$. Намерете най-малката стойност на израза $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}+\dfrac{1}{c^2+1}$.

Отг. B: Ако числата са равни, стойността на израза е 2,7, а ако са 1, 0, 0, тя е 2,5. За да се уверим, че 2,5 е минималната стойност, ще се опитаме да открием *p*, *q*, за които $1/(x^2+1)\geq px+q$ е в сила за всяко x от интервала [0; 1] (в който могат да се изменят *a*, *b*, *c*). Неравенството е еквивалентно на $1\geq(px+q)(x^2+1)$, т.е. на $px^3+qx^2+px+q-1\leq 0$. като при $x=0$ и $x=1$ се достига равенство Прилагаме Хорнер и от условията 0 и 1 да са корени получаваме $q=1$, $p=-0{,}5$:

	p	q	P	$q-1$
0	p	q	P	$q-1=0$
1	p	$p+q$	$2p+q=0$	

Останалият израз е $-0{,}5(x-1)\leq 0$, което е вярно в дадения интервал. Сумираме $1/(x^2+1)\geq -0{,}5x+1$ за $x=a, b, c$ и поради $a+b+c=1$) получаваме желаното.

[30HR] Na koliko se različitih načina 6 ploha kocke može obojiti ako imamo četiri boje, a isti načini bojanja su oni koji se mogu rotacijama dovesti do poklapanja?



A) 240 B) 360 C) 480 D) 720 E) Nijedan od tih

По колко различни начина можем да оцветим шестте стени на куб, ако имаме четири цвята, а еднакви оцветявания са тези, които могат да се получат едно от друго с ротации?

Отг. A. $|G|=24$. $|\mathrm{Fix}(\boldsymbol{i})|=4^6=4096$.

$|\mathrm{Fix}(90^\circ\text{-C-ротация})|=4^3=64$.

$|\mathrm{Fix}(180^\circ\text{-C-ротация})|=4^4=256$.

$|\mathrm{Fix}(\text{P-ротация})|=4^3=64$.

$|\mathrm{Fix}(\text{B-ротация})|=4^2=16$.

Отговор: $\dfrac{4096+6.64+3.256+6.64+8.16}{24}=240$.